



TITLE:

純電子プラズマで検証する二次元 オイラー流体の特性と限界 (オイラ ー方程式250年:連続体力学におけ るオイラーの遺産)

AUTHOR(S):

際本, 泰士; 河井, 洋輔; 曾我, 之泰; 青木, 順

CITATION:

際本, 泰士 ...[et al]. 純電子プラズマで検証する二次元オイラー流体の特性と限界 (オイラ
ー方程式250年:連続体力学におけるオイラーの遺産). 数理解析研究所講究録 2008, 1608:
47-58

ISSUE DATE:

2008-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/139992>

RIGHT:

純電子プラズマで検証する二次元オイラー流体の特性と限界

京都大学人間・環境学研究科 際本泰士, 河井洋輔, 曾我之泰, 青木順
Graduate School of Human and Environmental Studies, Kyoto University

§1. 非中性プラズマ・純電子プラズマ

クーロン力で長距離相互作用する多粒子系をプラズマと呼ぶ。更に構成粒子の電荷が正負のうち片方のみであれば、非中性プラズマと呼ぶ。後者は対抗電荷の遮蔽がないため力が距離の二乗に逆比例して遠方まで届くので、重力系とよく似ているが、相互間には斥力が働くため散らばろうとする。従って、この系を有限の空間にとどめるには、外部から電磁場による拘束を課さねばならない。ここでは核融合を目指す高温中性プラズマとは違い、対抗電荷による遮蔽の不在が効いて、非中性プラズマは強い外場による拘束・制御に良く従う。ここで報告するのは、電子のみで構成される非中性プラズマ（純電子プラズマと呼ぶ）の集団的挙動におけるオイラー流体の特性の観測である。

一様な磁場の方向に矩形に近い電位分布を重畳した Malmberg-trap の中において、各電子は半径が 0.3mm 以下の円軌道上で $\omega_c/2\pi \sim$ 数 GHz の gyration を行いながら、軸方向には $v_T/L \sim$ 数 MHz の往復運動をする。一方自己電場 E を通じて互いの間には斥力が働くが、磁場 $B = B\hat{z}$ によって変位は電場と磁場の両方に垂直な方向に起きる。これは、 $E \times B$ ドリフトと呼ばれる旋回（案内）中心の移動であり、電子群は局所的に流速 $u = (E \times B)/B^2$ で流れる。もし、磁場方向の密度分布が各磁力線について一様であれば、この流れは磁場に垂直な断面 (x, y) で記述され、 $\nabla \cdot u = 0$ であることが容易に示される。つまり非圧縮性の二次元流体である。この運動が他と区別されて明瞭に現れるには、断面内の密度分布の代表スケールを a として、 $\omega_c \gg v_T/L \gg u/a$ が満たされなければならない。つまり x - y 平面内のマクロな運動は磁場方向の往復運動に比べて緩やかでなければ三次元運動を無視することができない。一方、二元運動の代表時間 a/u がクーロン衝突時間よりも短ければ、この時間帯において散逸は一応無視できると考えて良い。更に流速の rot をとり、Poisson 方程式に結びつけると、渦度が電子密度に比例することが判る。密度分布は高い精度を持って直接観測可能である。[1]

本来粒々の電子が三次元運動をする多粒子系においては、様々な時空スケールにおいて多様な現象が進行する。この多層的なダイナミクスの中から二次元オイラー流体の特性を引き出すには、上記の条件を満たす環境を作り、適切な時空スケールで現象を観る必要がある。これは別に特殊なことではなく、どのような「流体系」においても、いかなる近似で「流体」とみなしているか確認すべきことを示しているに過ぎない。実験的に二次元オイラー流体の特性を満たす条件を作ることは、さほど困難ではない。例えば、数千回転するほどの長時間に渡りオイラー流体の特性を維持することが、数 cm サイズの純電子プラズマにおいて実現可能である。この間に渦塊の離合集散が多段階に進行する。鳴門の渦や台風など自然界の渦において、数回転以内に散逸効果が現れることとは対照的である。

§2. 実験方法の概略

電子を閉じ込める電位分布は、図 1 に示すように、磁気軸と一致した円筒状に互いに絶縁した導体リングを多数並べ、各リングには外部電源により最適の電圧分布を与えて形成する。軸方向には中心部で平坦、両端部で急速に深くなる電位分布を本研究では採用する。アーンショウの定理から真空電位分布には極大・極小は存在しないので、電位は半径方向に上昇するが、それによる電子の流出は軸方向に一様な磁場によって阻止する。電子は閉じ込め域の外部においたカソードから放出される。この熱電子を閉じ込め域に蓄積するには、カソードに面した電位障壁を短時間浅くして通過させ、戻した後、それを保持するサイクルを数～1000 回繰り返して、糸状分布が次々と混合し緩和するのを待つ。その上で、例えば、電位障壁の高さを瞬間的に適当な値まで下げると、自己電位が深い軸近傍の電子

は斥力によって磁場に沿って流出するので、密度分布には穴が空く。このような密度分布の中では周方向の $E \times B$ 流れには動径方向に強いシアができるので、流体力学で Kelvin-Helmholtz 不安定性（非中性プラズマ物理では diocotron 不安定性）と呼ばれる摂動が成長する。障壁の高さによって、密度分布は穴の空いた状態から、平坦な形状、あるいは軸上にピークを持つ状態まで幅広く調整できる。更にこのような連続分布の中に細くて高密度の紐状分布（渦糸分布）を重ねることも可能である。渦糸の位置も多様に設定することができる。[2]

このような手法で初期分布を形成したあと、本来の電位分布に戻して放置すると、純電子によって構成される渦糸は孤立運動を行う。外部から物を挿入したり、外壁に非対称な突起があると本来保存性が極めて高い純電子集団には、動径方向の輸送が無視できないほど増大し、系は破壊される。ここに、渦運動の代表時間は $E \times B$ 回転に伴う密度分布の回転周期である。その長さは殆ど磁場強度に反比例し、 $10 \sim 1000 \mu s$ である。

所定の時間が経過すると電子導入とは反対側にある電位障壁を取り去り、電子を磁力線にそって放出する。その先には数 kV の電位に置かれた蛍光面があり、加速された電子は衝突後、その個数に比例した強度で蛍光を発する。その発光分布を CCD カメラにより二次元の数値データとして記録するのである。[3,4] その例を図 2 に示す。空間的かつ検出強度において、高い分解能が達成されている。蛍光面の表面は 400nm のアルミ薄膜で覆われており、励起によってエネルギーを失った電子はここに捕集され、外部回路に抽出される。その電流は精密に測定できるので、電荷量より全電子数が評価される。それを輝度分布に比例して配分すると、軸方向に線積分された密度分布の絶対値が決まる。これをプラズマ長で割ると、密度分布が決まり、更に境界条件付きで二次元面内の自己電位分布が決まる。この自己場とトラップのための真空場を重畳すると、この二次元電子渦糸の流れ場が決定されることになる。

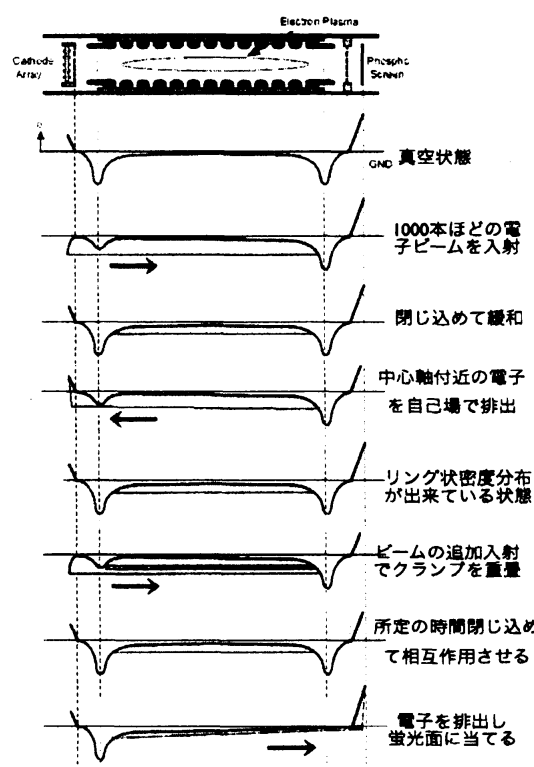


図 1. 純電子プラズマ初期分布の形成と計測（クランプとは渦糸のこと）



図 2. 高解像の CCD カメラに記録された純電子の密度分布。左側はプラズマ中央面において 45mm x 45mm の視野を示す。右側は別ショットで 17mm x 17mm の視野にズームアップ。どちらも 2048x2048 個の画素で構成され、各画素は 1~60000 の線型感度域を持つ。

中性流体では差分操作を経て得た流速分布を更に微分して渦度を評価するのに対して、純電子プラズマでは渦度に比例する密度が直接計測される。更に流れ関数に対応する電位分布は密度の積分から導出されるため、データ解析段階においてノイズの混入は極めて小さい。しかもこの積分は生データを、境界条件を満たす Bessel 関数と三角関数を組み合わせた直交関数系で展開したあと、代数的に実行できるため、系統的・高速かつ精度良く実行できるという大きな利点がある。[3-5]

§3. 案内中心の集合体とみた純電子の流れと二次元 Euler 流体との対応関係[1]

前節で述べた対応関係について、簡単に確認しておこう。まず純電子プラズマの案内中心の流速はポテンシャルと磁場によって、 $u = \hat{z} \times \nabla \phi / B$ と表される。この結果渦度は $\zeta = \hat{z} \cdot \nabla \times u = \nabla^2 \phi / B = en / \epsilon_0 B$ と表される。最後の関係の導出には Poisson 方程式を用いた。非圧縮性 $\nabla \cdot u = 0$ は容易に導出できる。連続の方程式 $\partial n / \partial t + u \cdot \nabla n = 0$ において、両辺に $e / \epsilon_0 B$ をかけると、渦度方程式 $\partial \zeta / \partial t + u \cdot \nabla \zeta = 0$ が得られる。二次元 Euler 流体において、流速と流れ関数との間には $u = \hat{z} \times \nabla \psi$ が成り立つから、渦度は $\zeta = \hat{z} \cdot \nabla \times u = \nabla^2 \psi$ である。従って、 $\psi = \phi / B$ と関係づければ、案内中心群は等電位面に沿って流れ、Euler 流体の流線と一致し、電子密度は渦度に比例することが確認できる。

§4. 運動量の圧倒的多数派は電磁成分

粒子の運動量密度は力学的には mnu であるが、磁場の中に置かれた電子は電場を作るので、電磁成 $\epsilon_0 E \times B$ が加わる。[6] したがって、系の角運動量は次のように壁 $r = w$ まで拡がる全体積積分、

$$L_z = \sum_j m_j u_{\theta j} r_j + \int dz \int_0^w dr r \oint d\theta \hat{\theta} \cdot (\epsilon_0 E \times B) \quad (1)$$

によって表される。電場は Poisson 方程式に従い粒子密度に比例して生じるから力学成分と電磁成分との比は、大まかにラーマー半径と密度分布の広がりとの比に等しく、実験では 1% 以下である。[1,7,8] 従って電子の総数を N とすると、角運動量は電子の空間分布に依存した電磁成分のみで表され、

$$L_z = \frac{eB}{2} \left(Nw^2 - \sum_j r_j^2 \right) = \frac{eB}{2} \left(Nw^2 - \int dz \int_0^w dr r^3 \oint d\theta n(r, \theta) \right) \quad (2)$$

と評価することができる。電子密度分布 $n(r, \theta)$ は図 2 に例示したように、画像データとして実験において直接観測される。(2)式の第 1 項は粒子数が保存する限り定数である。

§5. 2本の渦柱の相互作用 [9]

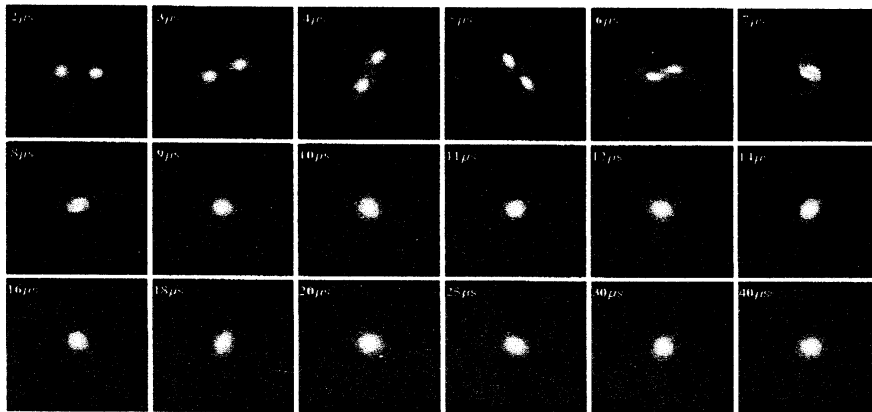


図 3. 9mm 隔たった 2本の渦柱の合体過程の画像記録

中心が約 9mm 隔たった 2 本の渦柱の相互作用による密度分布の時間変化を図 3 に示す。この間隔が 12mm まで拡がると、100 μ s の間両渦柱は図 3 の 3 μ s フレームに描かれるように近づいてはまた離れるサイクルを繰り返す。そこで 2 渦柱間に 1/10 以下の渦度の柱を背景渦として追加すると、両渦柱はこの薄い渦をシート状に引き延ばし、自身の周りに巻き取りながら急速に接近し、図 3 の場合と同様に合体に至る。背景渦が無い場合、渦柱の重心間距離がゼロになるまでに要する合体時間は、初期の渦間距離とともに増加する。そこで各時刻の渦間距離を初期間隔で、時間を 2 渦系の初期回転周期で規格化すると、図 4 に示すように、合体に要する時間は全て系回転の 2 周期にほぼ等しいと纏めることができる。渦柱は第 1 周期の間に变形し、第 2 周期目に入ると、急速に近接・合体する。この所要時間は粘性効果より遙かに短い。

合体を駆動するのは、渦度分布の变形によって、流れ場に多極成分が生まれ、2 渦の重心を互いに近づける移流場ができるためと考えられる。それを指示する解析結果を図 5 に描く。実験室系で観た流線は同心円の集まりに過ぎないが、これを渦重心の周りの回転座標系で観たのが図 5 である。

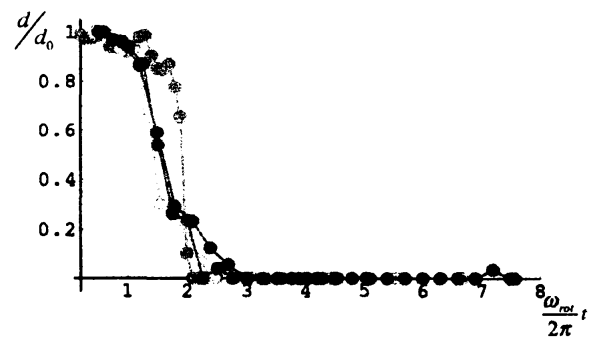


図 4. 系の回転周期で規格化した渦柱間距離



図 5. 合体直前の渦度分布と回転座標系で観た流れ場[9].

図 3,5 は良く知られた数値計算による Contour Surgery[10]で得られる渦度分布に良く似ていることが了解されるであろう。これは、非圧縮性が優越した渦間の相互作用の理論的枠組みを、純電子プラズマで良く再現できることを意味している。しかしながら、低レベルの背景渦の存在が合体過程を支配することを示唆する上記の観測結果は、未だ必ずしも理論/シミュレーションで検証/支持されているわけではない。実験サイドから観て大変興味がある。背景渦が構造形成に果たす役割はこの後の記述でも度々現れるだけに、理論面から検討を深めていただきたいところである。

図 3 に示した渦度（密度）分布から角運動量(2)の第 2 項 $L(r)$ とその径方向の輸送率 $\Gamma_L(r)$ を

$$L(r) = \int_0^{2\pi} d\theta n(r, \theta) r^3, \quad \Gamma_L(r) = \int_0^{2\pi} d\theta n(r, \theta) r^3 v_r(r, \theta) \quad (3)$$

のように求めて、その半径方向の分布を図 6 に表す。強い渦に対応する渦柱の中心が近づくことは $L(r)$ が当初の 7mm のピーク位置から内側に移動することを意味する。しかし、全角運動量を保存するには、外部に拡がる成分も必要である。これも図 6 に現れている。つまり渦度分布の再配列には角運動量分布の再配列が必要なのである。この内向きと外向きの流れは図 6 に描かれた $\Gamma_L(r)$ の負と正とに対応する。外向きの流れが図 3 において、渦巻きながら拡がっていくスパイラル分布によって担われている。それを補うために高密度のコア部が近づき合体するのである。ここに希薄な背景渦度分布の役割がある。初期間隔が近ければ、相手側の流れ場のシアによって当方の渦度分布の周辺部が剥ぎ取られ、スパイラル部になるが、そうで無いばあいには、背景渦度がその代役を果たす。

渦度保存の観点からはこの考え方で良いのだが、式(2)から明らかなように、 $L(r)$ は正定数に対して引き算となっている。つまり、密度分布が広がる場合は、電磁角運動量は減少し、逆に中心に向かって密度分布が収縮する場合には増加する。力学的には逆のようであるが、これが実験で得られる電磁角運動量の現実であることは、角運動量の増減と密度分布の膨張／収縮を絡めて議論する場合には留意する必要がある。[7,8] これは本講演では省略した二次元の渦運動と三次元波動との結合に関係している。念のため付言すると、図3に始まる孤立系としての渦柱の合体過程では、実験の再現性の範囲内において、渦の循環に比例する全粒子数と全角運動量は保存している。

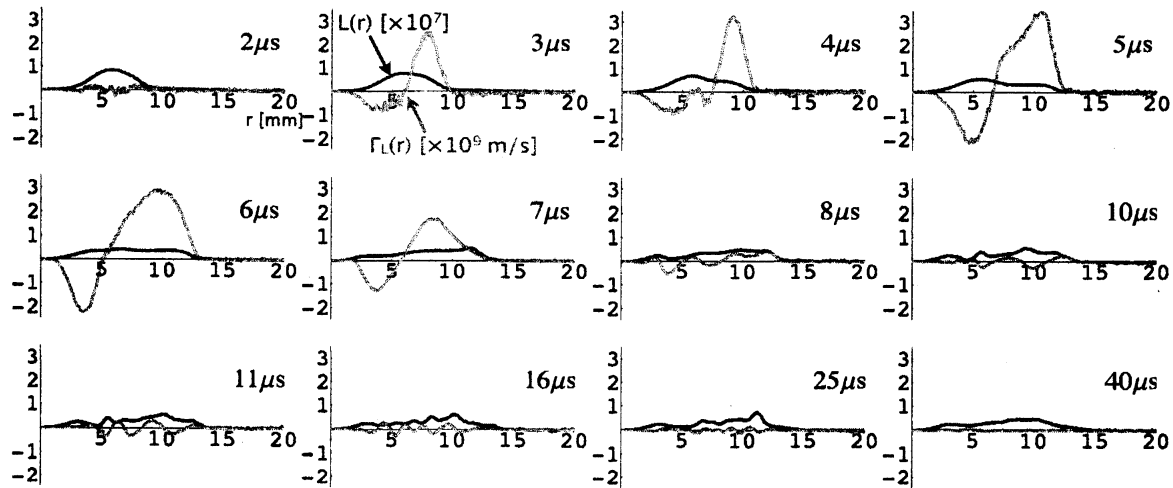


図6. 渦運動に伴う電磁角運動量の半径分布と、その径方向輸送率分布の時間変化[9]

§6. 乱流・秩序渦・渦結晶

前節では渦相互作用の基礎過程について述べた。このような渦柱が強度も揃わずに多数存在し、更にその隙間を低密度の背景渦が不均一に満たしているのが現実の渦場であろう。そこでどのような構造が出現するかをこれから議論したい。従来の報告を概観し、その上で我々がこれまでに純電子プラズマ実験により検証してきた渦運動の特性を対比すると、渦度の集中度の増加につれて図7に示すような構造変化が起きると考えることができる。以下には各場合について最近の実験結果を報告する。

なお参考までにここで付言しておくが、正負の点渦系について、系のエネルギーが高くなった極限を考え、ミクロカノニカル統計における状態数を求め、それを元にて温度を定義すると、負温度状態が得られる。このような初期条件から、点渦の運動を数値シミュレーションで追跡すると、同符号の渦同士が集合した状態に到達する。[11]これは Onsager が二次元乱流における波数のスペクトルシフトを点渦系で表現したモデルを検証したものである。[12]

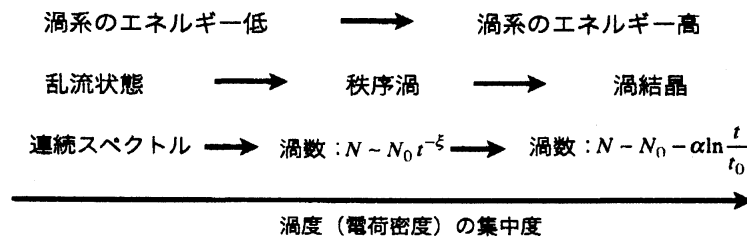


図7. 渦度が集中するにつれて構造の秩序度が高まる。

§6.1 不安定な初期分布から発展する渦運動と乱流

純電子の高い保存性を活用した実験では、外部からのエネルギー注入と流出のバランスにより到達する定常状態を検証するよりも、孤立系として初期状態から緩和する過程 (free-decaying) を時間的に追跡するところに有効性がある。外部から連続的に低レベルの擾乱を加えて小さな散逸過程とバランスさせて、定常状態を検証することは不可能では無いので、今後の課題とするが、ここでの報告は free-decaying process に焦点を当てる。

不安定な初期分布としては、円柱状の密度分布から中軸部を抜き取った、中空分布を採用する。その実験的手法は図1の5行目までの操作から構成される。この密度(渦度)分布を磁力線方向に積分した量が生のデータとして画像(実際には二次元の数値行列)で表現される。時間経過の一例を図8に示す。[13,14] 周方向のモード数が $m=5$ の摂動が非線形効果によって選択的に成長し $13\mu\text{s}$ には5本の強い渦柱を形成する。これらの渦柱の周りには、初期分布に含まれ渦柱からは除外された背景渦が既に存在する。隣あう渦柱対については、図3において観測したプロセスが $15\mu\text{s}$ に示すような構造変化を起こしながら進行すると考えてよい。もちろん各対が独立に相互作用するわけではない。合体の結果渦柱の数は4本に減少する。($21\mu\text{s}$) しかし、渦柱は既に大きく変形しているので、合体による減数は急速に進行し、周方向の中心モード数も下方にずれていく。

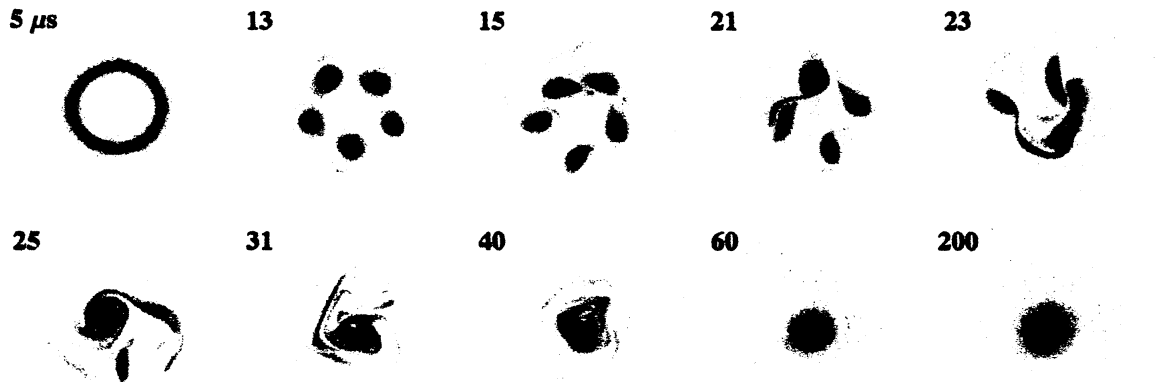


図8. 周方向流速にシアを持つ hollow 状の初期密度分布から diocotron 不安定が成長して、渦を形成し、渦間の相互作用で乱れが発達し、最後は釣鐘状の安定な分布に落ち着く。[14]

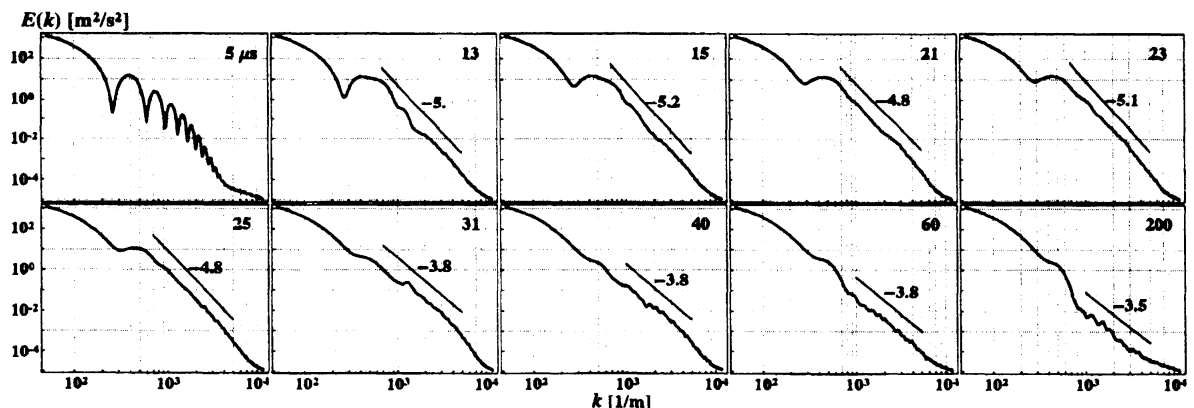


図9. 図8に表示した各時刻の密度分布画像から導出した波数空間におけるエネルギースペクトル。[14]

しかしそれと同時に強い渦から放出された希薄な渦は細く伸びてスパイラル状に拡がって行く。図3に観られた規則的なスパイラル構造は、ここでは大きく乱れている。この構造は波数スペクトルが

上方に拡がりつつあることを意味している。15-40 μ s に激しく変化する密度分布を波数スペクトル空間で眺めると、これは正に free-decaying turbulence である。

図8に示したこのような密度分布から電位分布を求め、これより系のエネルギー分布を波数空間に分解したものが図9である。図8の初期分布(5 μ s)に観られる切れ味のよい hollow 分布から得られるエネルギースペクトル(図9, 5 μ s)には、密度分布の幅に対応する凹みが現れる。この代表スケールは流れのシアをエネルギー源とする diocotron 不安定性によって密度分布が分裂しフィラメント分布を放出する過程によって、急速に消滅するため、エネルギースペクトルにおける凹みは埋められて、13 μ s に顕著な渦柱のサイズに対応する波数を極大として、ほぼ波数のべきに依存して減少する形となる。この極大に対応する波数は目立たなくはなるものの 200 μ s まではこぶとして認識できる。これは図3に現れた強い秩序渦(coherent vortices)に対応するものと解釈される。波数空間におけるエネルギースペクトルの変化は、初期分布に由来する強い渦を起点とする波数空間における輸送と解釈できるであろう。実際この乱れた渦系の循環、エネルギー、角運動量は全空間を積分すると、ここに示した緩和過程の期間に渡って良く保存されている。

図9に表された波数空間におけるエネルギー $E(k)$ やエンストロフィー $Z(k)$ のスペクトルの時間変化から、波数空間におけるこれらの量の輸送率

$$\varepsilon(k) = - \int_{k_{min}}^k dk \frac{\partial E(k)}{\partial t}, \quad \eta(k) = - \int_{k_{min}}^k dk \frac{\partial Z(k)}{\partial t} = - \int_{k_{min}}^k dk k^2 \frac{\partial E(k)}{\partial t} \quad (4)$$

を図10のように評価することができる。

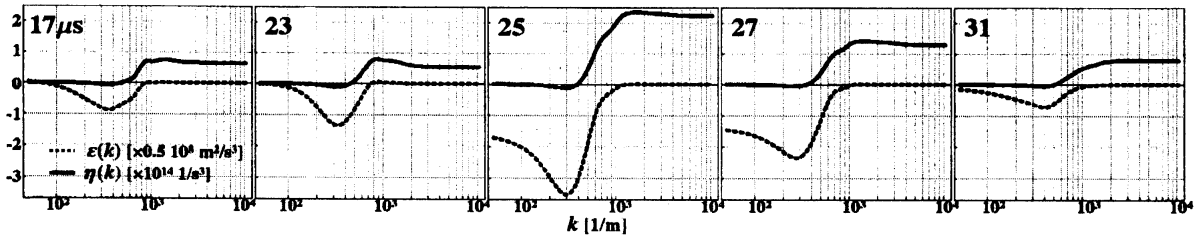


図10. 図9から評価したエネルギーとエンストロフィーの波数空間における輸送率 [16]

初期段階で発生する5個の渦柱のサイズで決まる $k_{inj} \approx 500/m$ を境としてエネルギーの輸送率 $\varepsilon(k)$ が下向きに強くなり、エンストロフィーの輸送率 $\eta(k)$ が上向きに増加し一定値に近づく。 $k \rightarrow 0$ において、 $\varepsilon(k)$ がゼロに向かって減少するのは、純電子プラズマが角運動量の保存によって無限遠に拡がることができないことに対応している。ここに初期条件によって有限サイズに規定された保存性渦系の特徴が現れている。

図9と図10は初期分布から自由に緩和する孤立した乱流系の時間変化を追跡したものである。各時刻におけるフレームが各状態の滞在時間を表すものと解釈して、時間の重みをつけて平均すると、一種の定常状態のスペクトルとして観ることができるかもしれない。このような意図で導出したのが図11である。エネルギースペクトルは $k > k_{inj}$ の領域でべき数 -4.4 で減少する。二次元定常乱流において、

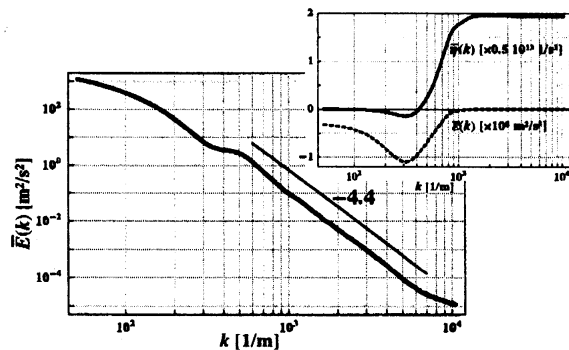


図11. 図9-10を時間平均したスペクトル

この値は -3 になると予測されている.[15] 図 9 によれば, 時間の経過とともに, 実験的にもベキ数は減少の傾向にある. しかし, -3 になるとは期待できない. 逆にこの差に注目することによって, 定常乱流においては, 構成要素が絶えず発生しながら時間的に発達して行く中で, 異なる世代間の相互作用を持ち得ることに対して, 本実験のような free-decaying turbulence では, 同世代の要素間の相互作用しか含まれないことによる違いをえぐり出すという新しい展望が開かれる可能性がある.

最後に波数空間におけるエネルギースペクトルの上限波数について言及しておきたい. 本実験と Euler 流体としての対応が電子の案内中心の ExB ドリフト近似に依存していることを §1 で述べた. もし密度 (渦度) 分布が微細化して, 電場がラーモア半径 ρ の内部で一様でなくなる場合には, 円軌道に沿って平均された実効的な電場は Finite Larmor Radius (FLR) 効果として, $(1 + \rho^2/4\nabla^2)E$ で置き換えられる. 案内中心が満たすべき連続の方程式にこの効果を入れると, 渦度方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\zeta - \frac{e\rho^2}{4\epsilon_0 B_0} \nabla^2 n \right) + \bar{v}_{GC} \cdot \nabla \zeta = 0 \quad (5)$$

と表されることになり, 拡散項が入ってくる. この効果で波数に上限が現れると, 我々は当初予想していた. 純電子プラズマを閉じ込める磁場の強度を 0.048T から 2.2 T まで変えられる装置と高い空間分解能を持つ計測系を整備・開発した理由の多くはここにあった.

実際実験を行ってみると, (5) 式に現れた FLR による「散逸効果」は観測を説明するには小さすぎる事が判った. 更に磁場強度を強めても, 揺動する密度分布の微細化はあるスケールで留まることを示した. つまり, ラーモア半径を小さくして行くと, それに追従して波数の上限が増加して行かなくなるのである. 実験によれば, その空間スケールの下限は 0.3mm 程度のところに留まる. この値は, 渦を構成する電子の密度から評価される電子間平均距離の 3 倍程度である. つまり, 電子のラーモア半径がいくら小さくなくても, 揺動する密度分布のスケールが縮小し, 粒子間の平均距離のスケールに近づくと, それ以上の微細化は阻まれる, という観測を得た. これは恐らく Euler の条件を満たす流体としては, 連続体の記述が適用できなくなるからであろう. 逆にとらえ直すと, 粒子間の平均距離のオーダーまで非中性プラズマが連続体と近似できることは驚きでもある. 通常の流体であれば, ほぼ流体構成粒子のサイズで相互作用が起きるから, 連続体としての記述は, それよりも遙かに大きなスケールでのみ成り立つはずである. 純電子プラズマにおいては, 相互作用が遮蔽を受けないクーロン長距離力であるため, 粒子間距離のスケールまで連続体の記述が成立するのであろう.

§6.2 渦結晶の形成と緩和

電子渦柱の合体を促進するのは, 渦度の広がり渦間距離に対して有する比率の大きさである. それでは, 渦度の広がりを圧縮していった場合, 前節で述べた free decay turbulence の進行速度が遅くなるだけであろうか? この問に対する答えは 1995 年に UCSD の Fine 等の実験によって, 思いがけない形で現れた.[16] もっとも, この設問自体が後付けであって, 1995 年には存在しなかった. これまでの研究では, 相互作用によってランダムに動き回る渦柱の合体間時間は渦塊数の減少に伴って増加し, 渦塊数は $\bar{n}_c \propto t^{-\xi}$ ($\xi \approx 1$) のように時間のベキに比例することが, シミュレーション・実験に基づき経験的に知られている. これを現象論的に記述するスケーリングモデルも提案されている. Fine 等の実験は更に, 不安定性によって生じる強い渦塊はベキ依存性に従った減数緩和の途中から規則的な配列を示し, その配列を構成する渦塊の数はベキ則から離れて, 長時間維持されることを示した. この「渦結晶」を形成する渦塊の広がり小さくて, 渦紐あるいは渦糸と称しても良い. 渦結晶の形成機構と破壊, その後に形成される新しい配列については, 強い興味を惹きながらも良く理解されていない. 少なくとも, 渦結晶緩和の時間依存性に関しては殆ど注目されて来なかった.

渦紐のランダムな運動が結晶形成に至るために、背景渦の寄与が本質的であることは実験的検証が積み重ねられてきた。[1,17,18] しかし、各結晶配位の寿命については議論されることが無かった。実際実験してみると、結晶配位の崩壊は極めて統計的に起こる。これは、様々な要素が重なり合っているからであり、条件の整理が必要であると考えられる。このような視点から、初期条件として半径の小さい高密度の渦塊（二次元であるから渦紐に近い）群を配列も含めて固定し、このセットを図12に示すような密度の異なる背景渦度分布の中に埋め込んで、系全体の緩和を追跡してみた。[17,19]

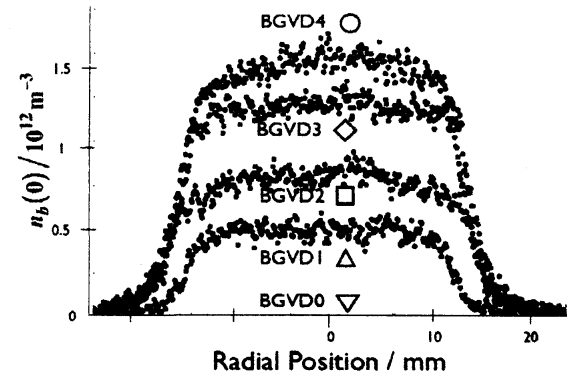


図12 渦紐を埋め込む背景渦の初期分布[19]

[1] 渦結晶を形成する渦紐数は時間の対数に依存する。

観測によれば、背景渦度が低い場合、渦紐が合体して減数し十分な量の背景渦を補充するまで、渦結晶は形成されない。そこで、初期条件とする背景渦の高さを様々に変えて、緩和過程で渦結晶配位が観測された場合に、結晶を構成する渦紐の個数を時間の関数として整理してみた。その結果を図13に纏める。各シンボルは図12に描いた背景渦の初期分布に添えたシンボルと対応している。ここで時間軸を対数スケールにとり、渦紐の数を線型スケールにとると、データ点はほぼ直線上に並ぶ。かなりばらついていることは事実であるが、縦軸を対数スケールにとると回帰直線は直線にならない。もし直線となれば、渦紐本数についてべき依存性が得られ、結晶配位が形成されない場合のスケリングに帰すことができる。確認のため、良く知られているFine等の実験を同様の片対数

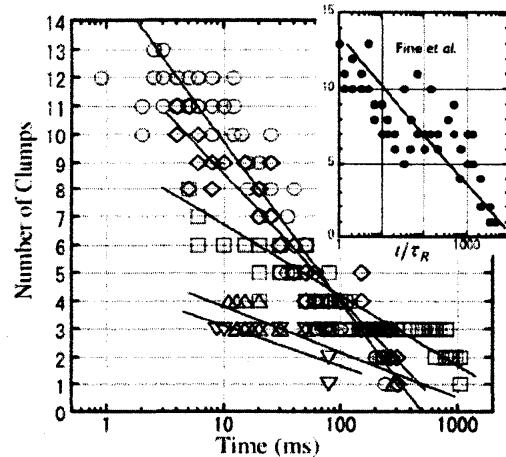


図13 各背景渦における結晶渦紐の時間変化[19]

座標に整理し直すと、挿入図に示すように、データ全体がほぼ直線状に並び、Fine等の論文[16]の面対数座標に現れた相関の弱い配列に比べて、大きく改善されることが明らかとなった。

ここに示した片対数座標系における直線の勾配は、背景渦の初期密度に依存する。その勾配は背景密度の増加とともに大きくなる。更に、最初の渦結晶が現れる時刻を t_0 とすると、 t_0 は初期密度が高いほど短くなる。このことから背景渦が結晶形成を促進することが判る。この観測結果は、次の関係にまとめることができよう。

$$\tilde{n}_c(t) = \tilde{n}_c(t_0) - \gamma \ln(t/t_0) \quad (6)$$

$$\text{但し,} \quad \gamma = 0.166 \exp\left[1.61 n_b(t_0)/10^{12} \text{ m}^{-3}\right] \quad (7)$$

この経験則は、背景渦が渦紐のカオス的な運動を秩序ある配列に導き維持する[17]だけでなく、いったん形成した準定常状態を破壊する役割も果たすことを意味している。

[2] この時間依存性の起源

物理量の時間変化が対数依存性を示す例は少なくない。粉体の間歇的なパッキングやガラスなどの構造パラメタがその例である。ある時間スケールでは(準)平衡状態にありながらも、より緩やかに進行する基礎条件の変化によって、既存の構造が突然破壊され、混沌とした運動のすえ、次の準平衡状態候補のどこかに移ると解釈される。我々の観測によれば、準平衡配位において渦紐内部の密度分布が拡散的に広がることに呼応して、周囲の背景渦によるシア付きの速度場が破壊効果を持ち始めることが重要と考えられる。それが対数依存性につながるかどうかについては、更なる検討が必要である。この解釈に従えば、流体渦としての特性と、流体を構成する粒子のミクロなダイナミクスが微妙に連携して間歇性が生まれることになる。

[3] 渦系の配位はいかに決まるか？

一方、孤立状態におかれて相互作用する渦紐の数が時間的に減少し、残留個数に応じて特徴的な二次元配位を形成することが観測されている。その例を図 14 に示す。各フレームにおいて上段が純電子プラズマにおいて得られた渦結晶と解釈される配位の撮影像である。ここでは図 13 にまとめた一連の実験で得た最大 14 本までの結果を示している。これに対応して下段に並べてあるのは、超流動状態にある液体ヘリウムにおいて常流動体の渦糸がエネルギーの極小状態として位置する配位の理論予測である。[20] マス印は対応する配位が見つかっていないことを意味する。

渦結晶の配位を定める物理機構としては、さまざまな提案はあるものの決定版が無い。観測と良く一致する配位を導出したと評価され、最も知名度の高いものは UCSD の Jin & Dubin が提案した、Regional Maximum Fluid Entropy model [21]であるが、配位を決めるためには天下りの拘束条件が多い。しかも配位間の遷移については何も語らない。この問題点を、本研究で得られた対数時間緩和特性を視野にいれて検討してみたい。

[4] 緩和方程式とベキ依存性の再現

経験式(6)が満たすべき運動方程式を捜してみる。経過時間を最初の結晶が現れる時刻 t_0 で規格化して、 $\tau = t/t_0$ で表すと、式(6)が次の微分方程式を満たすことはすぐわかる。

$$\frac{d\bar{n}_c(\tau)}{d\tau} = -\gamma \exp\left[-\frac{\bar{n}_c(1) - \bar{n}_c(\tau)}{\gamma}\right] \quad (8)$$

ここで、渦紐の環境を構成する背景渦に依存する γ と渦紐数を組み合わせた、一種の Boltzmann 変数 $\eta(\tau) = \exp[\bar{n}_c(\tau)/\gamma]$ を導入し、 $\eta_1 = \eta(1)$, $U(\eta) = \eta^3/3$ と定義すると、(8)式は次の形に変換される。

$$\eta_1 \frac{d\eta}{d\tau} = -\eta^2 = -\frac{d}{d\eta} U(\eta) \quad (9)$$

これは、状態変数 η で代表される質点がポテンシャル $U(\eta)$ の中をずり落ちる運動を表す。その摩擦は平滑化されたポテンシャルがミクロスケールで有する凹凸に陥りながらも、渦紐と背景渦の揺動によって脱出し、よりエネルギーの低い状態に遷移する過程を表すと解釈する。エネルギーの極小状態として得られる図 14 の超流動ヘリウムモデルは、このミクロスケールの凹凸への捕捉に対応すると考えて、関係づけるのである。

この変換された変数によって、経験則(6)を表現しなおすと、結晶形成が無い場合の強い渦に関する比例則と同じ形の時間依存性が次のように得られる。

$$\eta(\tau) = \eta_1 \tau^{-\xi} \quad (10)$$

しかも、ここで得られる指数は、乱流の相似則モデルにおいて期待されている $\xi=1$ である。強い渦の乱流的相互作用と渦結晶の形成・崩壊・遷移過程をこのような変換を通じて関係づけられることに物

理的意味があるだろうか？もし何か意味があるとすれば、その実態が何であるかについて、今後更に検討を加えて行きたい。

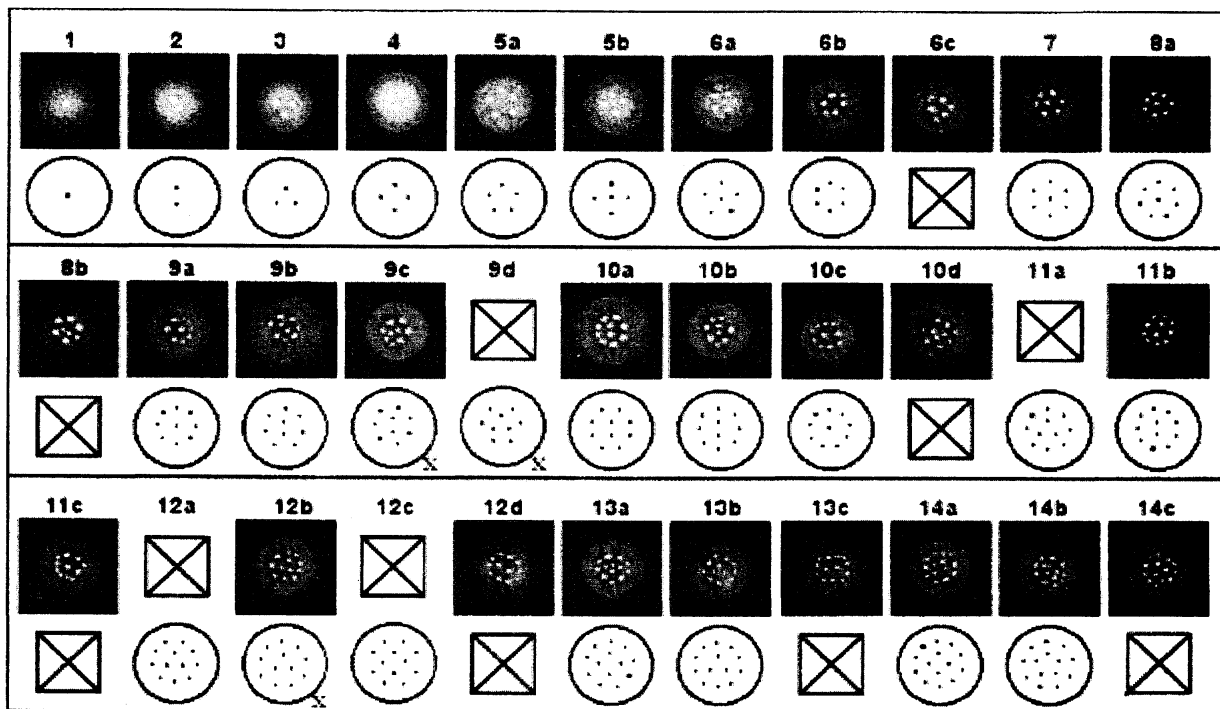


図 14 純電子プラズマの渦結晶配位（上段）と対応する超流動ヘリウムの渦糸配位（下段）

参考文献

- [1] 際本泰士：「非中性プラズマ中の渦運動」、『日本物理学会誌』 Vol.56, No.4, pp.253-261 (2001).
- [2] Y. Kiwamoto, K. Ito, A. Sanpei and A. Mohri, Phys. Rev. Lett. Vol.85, 3173 (2000).
- [3] K. Ito, Y. Kiwamoto and A. Sanpei, Japanese J. of Appl. Phys. Vol.40, 2558 (2001).
- [4] J. Aoki, Y. Kiwamoto, Y. Soga and A. Sanpei, Japanese J. of Appl. Phys. Vol.43, 7267 (2004).
- [5] J. Aoki, Y. Kiwamoto and Y. Kawai, Physics of Plasmas, Vol.13, 112109 (2006).
- [6] 太田浩一：「電磁気学 II」 §12, 丸善物理学基礎コース (2000)
- [7] Y. Kiwamoto, Y. Soga and J. Aoki, Physics of Plasmas, Vol.12, 09450 (2005).
- [8] Y. Soga, Y. Kiwamoto and N. Hashizume, Physics of Plasmas, Vol.13, 052105 (2006).
- [9] 鈴木大輝：京都大学総合人間学部平成 18 年度卒業論文
- [10] Darryn W. Waugh, Phys. Fluids A, Vol.4, 1745 (1992).
- [11] Y. Yatsuyanagi, Y. Kiwamoto, H. Tomita, M. M. Sano, T. Yoshida and T. Ebisuzaki, Phys. Rev. Lett. Vol.94, 054502 (2005).

- [12] L. Onsager, *Nuovo Cimento, Suppl.*6, 279 (1949).
- [13] Y. Kawai, Y. Kiwamoto, K. Ito, A. Sanpei, Y. Soga, J. Aoki and K. Itoh, *Journal of Phys. Soc. Japan*, Vol. 75, 104502 (2006).
- [14] Y. Kawai, Y. Kiwamoto, Y. Soga and J. Aoki, *Phys. Rev. E*, Vol.75, 066404 (2007).
- [15] R.H. Kraichnan, *Phys. Fluids*, Vol.10, 1417 (1967).
- [16] K.S. Fine, A.C. Cass, W. G. Flynn and C. F. Driscoll, *Phys. Rev. Lett.* Vol.75, 3277 (1995).
- [17] A. Sanpei, Y. Kiwamoto, K. Ito and Y. Soga, *Phys. Rev. E*. Vol.68, 016404 (2003).
- [18] Y. Kiwamoto, K. Ito, A. Sanpe and Y. Soga, *Physica Scripta*, T98, 34 (2002).
- [19] Y. Kiwamoto, N. Hashizume, Y. Soga, J. Aoki, and Y. Kawai, *Phys. Rev. Lett.* Vol.99, 115002 (2007).
- [20] L. J. Campbell and R. M. Ziff, *Phys. Rev. B*, Vol.20, 1886 (1979).
- [21] D.Z.Jin and Daniel H. E. Dubin, *Phys. Rev. Lett.* Vol.80, 4434 (1998).